

Olimpiada Națională de Matematică 2026

Etapa locală - Iași, 30 ianuarie 2026

Clasa a XI-a

Barem de notare și evaluare

Problema 1

(22 de puncte)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Calculați:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{100n^2 + 19n + 1} \right\};$

b) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} \left(1 + \frac{5}{1 \cdot 3} \right) \left(1 + \frac{7}{2 \cdot 4} \right) \left(1 + \frac{9}{3 \cdot 5} \right) \dots \left(1 + \frac{2n+3}{n(n+2)} \right).$

Soluție

a) $10n < \sqrt{100n^2 + 19n + 1} < 10n + 1 \Rightarrow \left[\sqrt{100n^2 + 19n + 1} \right] = 10n \dots\dots\dots 4p$

$$\left\{ \sqrt{100n^2 + 19n + 1} \right\} = \sqrt{100n^2 + 19n + 1} - 10n = \frac{100n^2 + 19n + 1 - 100n^2}{\sqrt{100n^2 + 19n + 1} + 10n}$$

$$= \frac{19n + 1}{\sqrt{n^2 \left(100 + \frac{19}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + 10n}} = \frac{19 + \frac{1}{n}}{\sqrt{100 + \frac{19}{n} + \frac{1}{n^2} + 10}} \dots\dots\dots 7p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{100n^2 + 19n + 1} \right\} = \frac{19}{20} \dots\dots\dots 3p$$

b) $1 + \frac{2k+3}{k(k+2)} = \frac{k^2 + 4k + 3}{k(k+2)} = \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)} \dots\dots\dots 3p$

Deci

$$\frac{3}{n^2} \left(1 + \frac{5}{1 \cdot 3} \right) \left(1 + \frac{7}{2 \cdot 4} \right) \left(1 + \frac{9}{3 \cdot 5} \right) \dots \left(1 + \frac{2n+3}{n(n+2)} \right) = \frac{3}{n^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \dots \cdot \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)} = \frac{(n+1)(n+3)}{n^2}$$

$$L = 1 \dots\dots\dots 5p$$

Problema 2**(22 de puncte)**

a) Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + 7 \cdot I_2) = 0$. Calculați $\det(A^2 - 3A + 7 \cdot I_2)$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $BA^4 = I_n + B$. Arătați că $AB = BA$.

Soluție.

a) $\det(A^2 + 7 \cdot I_2) = 0 \Rightarrow \det(A + i\sqrt{7} \cdot I_2) \det(A - i\sqrt{7} \cdot I_2) = 0$ 4p

Fie $d = \det A, t = \text{Tr } A$.

Deoarece $\det(A - i\sqrt{7} \cdot I_2) = d - i\sqrt{7}t - 7 = 0 \Rightarrow d = 7, t = 0$ 7p

Din ecuația Cayley- Hamilton avem $A^2 - (\text{Tr } A) \cdot A + (\det A) \cdot I_2 = O_2 \Rightarrow A^2 + 7I_2 = O_2$

Atunci $\det(A^2 - 3A + 7I_2) = \det(-3A) = 63$ 3p

b) Din $BA^4 = I_n + B$ avem $B(A^4 - I_n) = I_n \Rightarrow B^{-1} = A^4 - I_n$ (1)3p

Din $BA^4 = I_n + B$ mai obținem $BA^5 = A + BA$ și $ABA^4 = A + AB$, de unde obținem că
 $BA^5 - ABA^4 = BA - AB \Rightarrow (BA - AB)(A^4 - I_n) = O_n$

Folosind relația (1) se obține că $(BA - AB)B^{-1} = O_n \Rightarrow BA - AB = O_n \Rightarrow AB = BA$ 5p

Problema 3**(23 de puncte)**

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $x_1 = -2, x_{n+1} = x_n + \frac{2026}{x_n}, \forall n \geq 1$. Calculați:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}$.

Soluție.

a) Observăm că $(x_n)_{n \geq 1} \subset (-\infty, 0)$ 3p

Cum $x_{n+1} - x_n < 0$, obținem că $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.....3p

Presupunem că $(x_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior, deci este convergent. Trecând la limită în relația de recurență, nu avem soluție, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 4p

b) Fie șirul $y_n = \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{x_n^2}{n}$ 3p

Aplicând criteriul Stolz-Cesaro, avem $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4052 + \frac{2026}{x_n^2}\right) = 4052$ 7p

Obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} -\sqrt{y_n} = -\sqrt{4052}$ 3p

Problema 4

(23 de puncte)

Arătați că pentru orice matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu $\det(A - B) \neq 0$ este verificată egalitatea $A(A - B)^{-1}B = B(A - B)^{-1}A$.

V. Pop

Soluție.

Dacă A, B sunt inversabile, atunci $A(A - B)^{-1}B = (B^{-1}(A - B)A^{-1})^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1}$ 3p

Iar $B(A - B)^{-1}A = (A^{-1}(A - B)B^{-1})^{-1} = (B^{-1} - A^{-1})^{-1}$, de unde rezultă concluzia.....6p

Dacă A sau B sunt neinversabile

considerăm $A_\alpha = A - \alpha I_n, B_\alpha = B - \alpha I_n$, deci $A_\alpha - B_\alpha = A - B$ 3p

Ecuțiile $\det A_\alpha = 0$ și $\det B_\alpha = 0$ au număr finit de rădăcini, deci există un interval $(0, a)$ astfel încât $\det A_\alpha \neq 0$ și $\det B_\alpha \neq 0$, deci A_α, B_α sunt inversabile.....4p

Din primul caz, avem că $A_\alpha(A - B)^{-1}B_\alpha = B_\alpha(A - B)^{-1}A_\alpha, \forall \alpha \in (0, a)$ 4p

Trecând la limită cu $\alpha \rightarrow 0$, obținem concluzia.....3p

Se acordă 10 puncte din oficiu.

Orice altă variantă corectă de rezolvare se punctează corespunzător.